慣性モーメントについて　（「ボルダの振り子」· 補足資料）

建設工学科・茂木

1.　モーメント（トルク）

図 1 のシーソーは，左右の錘（おもり）の重さと回転の中心 o からの力の作用点までの距離の積が等しくなっており，シーソーはつり合っています．このように，剛体（ここではシーソーの棒）の回転運動は，力そのものではなく，力（正確には力の回転半径に直交する成分）と回転中心 o からの力の作用点までの距離の積で表される量に依存しており，これをモーメントと呼びます．

$$[\text{モーメント}] = [\text{力}] \times [\text{回転中心と作用点の距離}]$$

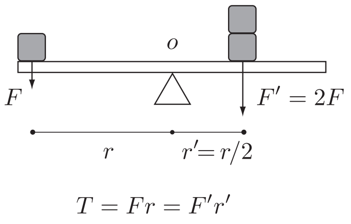

図 1.　シーソーのつり合い

2.　質点の運動方程式

図 2 に示すように，質量 m の質点に力 F を加えると，質点は加速度 α を生じます（ニュートンの運動方程式）．

$$F = m\alpha = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1}$$

ここで，x は質点の移動距離です．式 (1) は

$$[\text{力}] = [\text{質量}] \times [\text{生じる加速度}]$$

の形になっていて，質量 m はこの質点を動かしたり止めたりすることの「大変さ」を表しています．

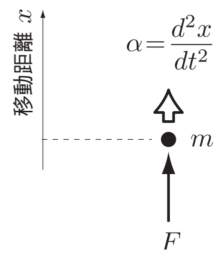

図 2.　質点の運動

3.　回転運動の方程式

次に，剛体の回転運動についても運動方程式 (1) と同様の形式の方程式を導くことを考えます．図 3 に示すように，図 2 で用いた質点を，質量のない長さ r の棒につけて回転させるものとします．図 2 と同様に質点に力 F を働かせると，前述のように質点には d^2x/dt^2 の加速度が生じますが，この加速度を回転角 θ で表すと，微小な角度 θ に対して，$x = r\theta$ より，両辺を t で微分して

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2}$$

となります．従って，質点の運動方程式 (1) は次式のように書き直すことができます．

$$F = m \cdot r\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3}$$

さらに，与えた力 F をモーメント T に書き直すために式 (3) の両辺に r をかけると次式が得られます．

$$Fr = mr^2\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{4}$$

$$\Longrightarrow T = mr^2\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \equiv I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{5}$$

$I = mr^2$ を**慣性モーメント**と呼びます．式 (5) は

$$[\text{モーメント}] = [\text{慣性モーメント}] \times [\text{回転の角加速度}]$$

となっており，質点の運動方程式 (1) と同じ形式の方程式になっていることがわかります．すなわち，運動方程式 (1) の質量に代って現れた慣性モーメント I は，**その剛体を回転させることの「大変さ」**を表しています．

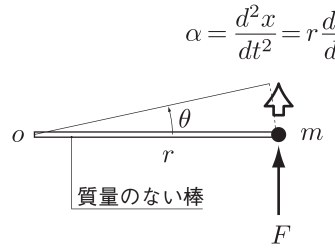

図 3.　質点と質量のない棒からなる剛体の回転運動

なお，図 4 のように，剛体が 2 つの質点 m_1，m_2 からなるとき，剛体の慣性モーメント I は，それぞれの質点の慣性モーメントを足し合わせたものになります．

$$I = I_1 + I_2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 \tag{6}$$

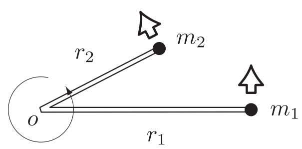

図 4.　2 つの質点と質量のない棒からなる剛体

4. 棒の慣性モーメント

(1) 回転の中心が棒の端にあるとき

一様な線密度（単位長さ当りの質量）ρ の棒の慣性モーメントを求めてみます．図 5 に示すように棒の長さ R とし，回転の中心が棒の端にあるものとします．

長さ Δr の微小部分の質量 Δm が

$$\Delta m = \rho \Delta r \tag{7}$$

であることから，回転の中心から r 離れたところにある微小部分の慣性モーメント ΔI は

$$\Delta I = r^2 \Delta m = r^2 \rho \Delta r \tag{8}$$

で与えられます．このような微小部分が $0 \leq r \leq R$ の範囲に存在するため，棒全体の慣性モーメント I は r に関して 0〜R まで積分することで求められます．

$$I = \int_0^R r^2 \rho dr = \rho \int_0^R r^2 dr = \rho \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{\rho R^3}{3} = \frac{MR^2}{3} \tag{9}$$

ここで，M は棒全体の質量で，$M = \rho R$ です．式 (5)(9) に見るように，慣性モーメントは

$$[\text{質量}] \times [\text{長さ}]^2$$

の次元を持っています．

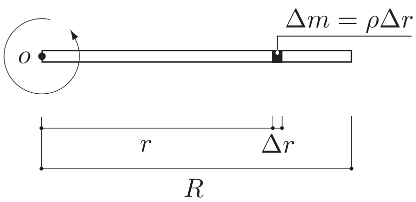

図 5. 端に回転の中心がある棒

なお，式 (9) の積分は下の和の計算と同義です．図 6 のように，棒全体を n 等分し，左から $1, \ldots, n$ とします．それぞれの微小部分の長さを Δr とおくと（すなわち，$\Delta r = R/n$），i 番目の微小部分の質量は $\rho\Delta r$，微小部分の重心の回転半径は $(i-1)\Delta r + \Delta r/2$ と表されます．従って，n 個の微小部分の慣性モーメントをすべて加えた，棒全体の慣性モーメント I は次のように求められます．

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{i=1}^{n} (\rho \Delta r) \left\{ (i-1)\Delta r + \frac{1}{2}\Delta r \right\}^2 \\
&= \rho \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{1}{2} \right)^2 (\Delta r)^3 \\
&= \rho \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{4} \right\} \frac{R^3}{n^3} \\
&\to \rho \frac{R^3}{3} \quad (n \to \infty)
\end{aligned} \tag{10}$$

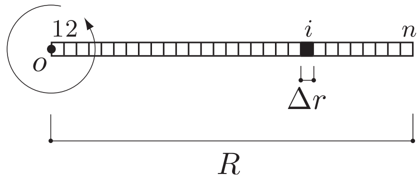

図 6. 端に回転の中心がある棒（その２）

(2) 回転の中心が棒の中央にあるとき

前節と同じ棒を，その中央を中心に回転させる場合を考えます．この場合，回転の中心が端にある場合の積分範囲を $-R/2 \leq r \leq R/2$ に変更し，次のように求められます．

$$I = \int_{-R/2}^{R/2} r^2 \rho dr = 2\rho \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{R/2} = \frac{\rho R^3}{12} = \frac{MR^2}{12} \tag{11}$$

棒の中央を持って回すのが一番ラクということは経験的に知られていますが，確かに式 (11) がこの棒の慣性モーメントの最小値になります（7 節参照・棒を立てて回す場合を除く）．

5. 円盤の慣性モーメント

半径 R，単位面積当り質量 ρ の一様な厚さの円盤を，その中心を軸として回転させるものとします．図 7 に示す半径 r〜r+dr，角度 θ〜θ+$d\theta$ に囲まれた微小部分の慣性モーメント ΔI は，

$$\Delta I = r^2 \Delta m = r^2 \ \rho \cdot dr \cdot r d\theta \tag{12}$$

より，全体の慣性モーメント I は次のように求められます．

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 (\rho dr \cdot r d\theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \rho dr d\theta \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta = \rho \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \rho \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{\rho R^4 \pi}{2} = \frac{MR^2}{2}
\end{aligned} \tag{13}$$

ここで，M は円盤の質量で，$M = \rho\pi R^2$ です．

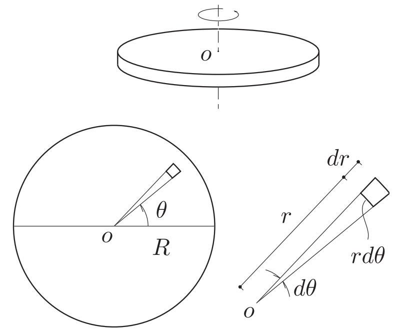

図 7. 円盤とその微小部分

6. 球の慣性モーメント

半径 R，密度（単位体積当り質量）ρ の球の慣性モーメントを考えます．図 8 のように，球を水平に薄く切り，球の中心から高さ h にある厚さ dh の薄い円盤の慣性モーメントを $i(h)$ とします．この円盤の半径が $r(h)=\sqrt{R^2-h^2}$ で与えられることから，式 (13) より，この円盤の慣性モーメント $i(h)$ は

$$i(h)=\frac{(R^2-h^2)^2\pi}{2}\cdot\rho\,dh \tag{14}$$

と表されます．

このような薄い円盤が $-R\le h\le R$ の範囲に積み重なっているので，この範囲で $i(h)$ を足し合わせると次式が得られます．

$$\begin{aligned}I&=\int_{-R}^{R}i(h)=2\int_0^R\frac{(R^2-h^2)^2\,\pi}{2}\rho\,dh\\&=\rho\pi\int_0^R R^4-2R^2h^2+h^4\;dh\\&=\rho\pi\left[R^4h-\frac{2R^2h^3}{3}+\frac{h^5}{5}\right]_0^R\\&=\rho\pi\left(R^5-\frac{2R^5}{3}+\frac{R^5}{5}\right)\\&=\rho\pi\frac{8}{15}R^5=\frac{2}{5}MR^2\end{aligned} \tag{15}$$

ここで，M は球の質量で，$M=\rho(4/3)\pi R^3$ です．

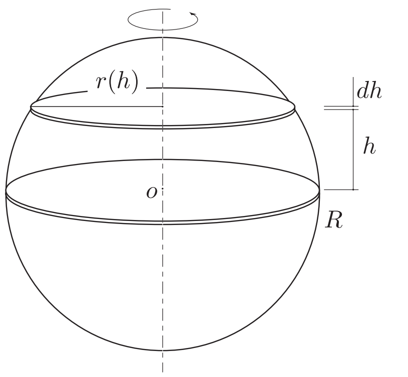

図 8.　球と薄い円盤の部分

7. 回転軸が重心を通らない場合の慣性モーメント

図 9 に示すように，回転軸 o と剛体の重心の距離を r_0，重心を通り回転軸と平行な直線 o_G と剛体の微小部分（その質量を dm_i とする）との距離を r_i とします．回転軸 o に対するこの剛体の慣性モーメント I は

$$\begin{aligned}I&=\sum_i dm_i(r_0+r_i)^2\\&=\sum_i dm_i\,r_0^2+2\sum_i dm_i\,r_0r_i+\sum_i dm_i\,r_i^2\\&=r_0^2\sum_i dm_i+2r_0\sum_i dm_i\,r_i+\sum_i dm_i\,r_i^2\end{aligned} \tag{16}$$

最後の式では，r_0 が定数のため $\sum$ から出しています．ここで，

$$\sum_i dm_i=M \tag{17}$$

$$\sum_i dm_i\,r_i=0 \tag{18}$$

$$\sum_i dm_i\,r_i^2=I_G \tag{19}$$

を考慮すると，

$$I=Mr_0^2+I_G \tag{20}$$

が得られます．ここで，M は剛体の全質量，I_G はこの剛体の重心を通る軸 o_G まわりの回転モーメント，また，式 (18) は重心の定義によって必ず 0 になります．

式 (20) の右辺第 1 項は質量 M の質点が半径 r_0 にあるときの慣性モーメント，第 2 項は剛体の重心を通る軸まわりの回転モーメントですから，剛体の質量と重心を通る軸まわりの回転モーメントがわかれば，任意の回転軸に対する慣性モーメントを簡単に求めることができます．

このことに基づいて，4 節に示した回転軸が端にあるときの棒の慣性モーメントを求めると

$$Mr_0^2+I_G=M\left(\frac{R}{2}\right)^2+M\frac{R^2}{12}=M\frac{R^2}{3} \tag{21}$$

となり，確かに式 (9) と同じ結果が得られます．

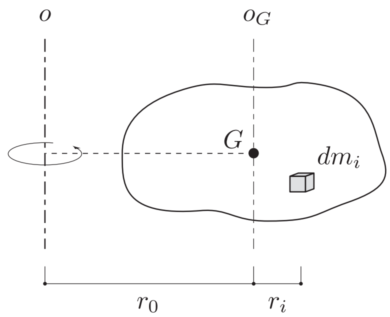

図 9.　回転軸が重心を通らないとき